

频域内振动传递路径的传递度排序^{*}

张义民

东北大学机械工程与自动化学院, 沈阳 110004

摘要 基于振动的基本理论和一般概率摄动法, 研究了频域内振动传递路径系统的路径传递概率的度量问题, 提出了频域内振动传递路径系统的路径传递度的新概念和方法, 在考虑工程中的不确定因素以后, 在频域内清晰地描述了振动传递路径系统的路径传递率和传递度。

关键词 振动 传递路径 传递概率 频域

振动系统包括 3 部分: 振动源、振动传递路径及振动接受结构, 传递路径是指振动由振动源经由特定的媒介物传递至接受结构所经过的物理介质。在工业文明带给人们舒适和方便的同时, 也产生了许多的振动和噪声, 因此降低振动和噪声是一个相当实际的问题, 目前大致有 3 种策略: (1) 减少机器设备的振动, 但不能以降低机器效率为代价, (2) 改善减振装置(大多用弹簧和阻尼构成)及厂房结构, (3) 隔离机器设备。因此研究振动和噪声的传递系统预测模型和动态设计具有重要的意义, 但是清晰正确地阐明多维路径的贡献量并不是一件容易的事情。目前在振源、传递路径和接受结构的交互作用的研究还处于初级阶段, 主要集中在实验方法和能量传递方法上^[1-3]。

本文基于振动的基本理论^[4]和一般概率摄动法^[5-7], 实用有效地提出了频域内振动传递路径系统的路径传递概率的度量方法, 给出了振动传递路径系统的路径传递度的新概念和方法, 以使用以描述频域内振动传递路径系统的路径传递率的排列顺序, 对振动传递路径系统的传递概率进行理论分析和数值计算, 据此可以为解决振动传递路径系统的路径传递度问题提供有效方便的途径。

1 振动传递路径模型

考虑图 1 所示的有阻尼的两自由度的振动传递系统, 这里只考虑单激励情形, 系统可以用 $x_s(t)$ 和 $x_r(t)$ 两个坐标来完全地描述, 应用牛顿定律得系统的振动微分方程为

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F(t) \quad (1)$$

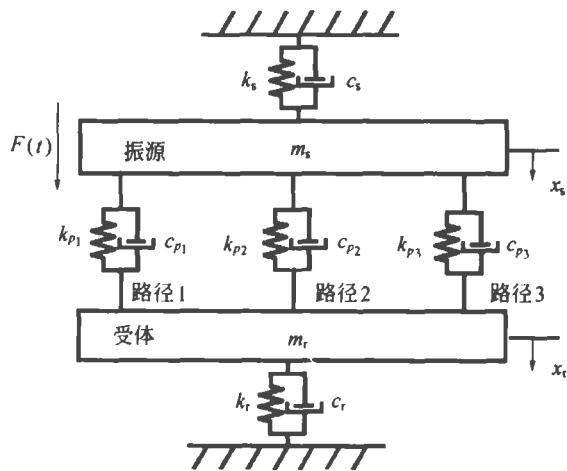


图 1 振动传递路径系统模型

式中

2006 06 21 收稿, 2006 08 14 收修修改稿

* 国家自然科学基金重点项目(批准号: 50535010)、辽宁省自然科学基金(批准号: 20052034)和高等学校创新团队资助项目

E mail: ymzhang@me.neu.edu.cn

©1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} m_s & 0 \\ 0 & m_r \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_s + c_p & -c_p \\ -c_p & c_r + c_p \end{bmatrix} \\
 \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} k_s + k_p & -k_p \\ -k_p & k_r + k_p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_s \\ x_r \end{bmatrix} \\
 \mathbf{F}(t) &= \begin{bmatrix} F_0 e^{i\omega t} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)
 \end{aligned}$$

这里 $c_p = c_{p1} + c_{p2} + c_{p3}$, $k_p = k_{p1} + k_{p2} + k_{p3}$. 不失一般性, 设稳态响应为

$$x_s(t) = X_s e^{i(\omega t - \varphi)}, \quad x_r(t) = X_r e^{i(\omega t - \varphi)} \quad (3)$$

这里 X_s 和 X_r 是决定于激励频率 ω 和系统参数的实数. 把(2)和(3)式代入方程(1), 得到相应的特征行列式为

$$\begin{aligned}
 \det[Z(\omega)] &= \det \begin{bmatrix} -\omega^2 m_s + i\omega(c_s + c_p) + (k_s + k_p) & -i\omega c_p - k_p \\ -i\omega c_p - k_p & -\omega^2 m_r + i\omega(c_r + c_p) + (k_r + k_p) \end{bmatrix} \\
 &= \omega^4 m_s m_r - \omega^2 [m_s(k_r + k_p) + (c_s + c_p)(c_r + c_p) + m_r(k_s + k_p) - c_p^2] + \\
 &\quad (k_s + k_p)(k_r + k_p) - k_p^2 + i\{-\omega^3 [m_s(c_r + c_p) + m_r(c_s + c_p)] + \\
 &\quad \omega [(c_s + c_p)(k_r + k_p) + (c_r + c_p)(k_s + k_p) - 2c_p k_p] \} \quad (4)
 \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re}\{\det[Z(\omega)]\} &= \omega^4 m_s m_r - \omega^2 [m_s(k_r + k_p) + (c_s + c_p)(c_r + c_p) + \\
 &\quad m_r(k_s + k_p) - c_p^2] + (k_s + k_p)(k_r + k_p) - k_p^2 \\
 \operatorname{Im}\{\det[Z(\omega)]\} &= -\omega^3 [m_s(c_r + c_p) + m_r(c_s + c_p)] + \omega [(c_s + c_p)(k_r + k_p) + \\
 &\quad (c_r + c_p)(k_s + k_p) - 2c_p k_p]
 \end{aligned}$$

并从而得到

$$X_s(\omega) e^{-i\varphi} = \frac{[-\omega^2 m_r + i\omega(c_r + c_p) + (k_r + k_p)] F_0}{\det[Z(\omega)]} \quad (5)$$

$$X_r(\omega) e^{-i\varphi} = \frac{(i\omega c_p + k_p) F_0}{\det[Z(\omega)]}$$

$$\begin{aligned}
 F_{T_{pj}} &= k_{pj}(x_r - x_s) + c_{pj}(\dot{x}_r - \dot{x}_s) = \\
 & [k_{pj}(X_r - X_s) + i\omega c_{pj}(X_r - X_s)] e^{i(\omega t - \varphi)} = \\
 & (k_{pj} + i\omega c_{pj})(X_r - X_s) e^{i(\omega t - \varphi)} \quad (7) \\
 & (j = 1, 2, 3)
 \end{aligned}$$

因而稳态响应的幅值为

$$\begin{aligned}
 X_s &= |X_s(\omega) e^{-i\varphi}| = \\
 F_0 & \sqrt{\frac{[-\omega^2 m_r + (k_r + k_p)]^2 + [\omega(c_r + c_p)]^2}{(\operatorname{Re}\{\det[Z(\omega)]\})^2 + (\operatorname{Im}\{\det[Z(\omega)]\})^2}} \quad (6a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 X_r &= |X_r(\omega) e^{-i\varphi}| = \\
 F_0 & \sqrt{\frac{k_p^2 + (\omega c_p)^2}{(\operatorname{Re}\{\det[Z(\omega)]\})^2 + (\operatorname{Im}\{\det[Z(\omega)]\})^2}} \quad (6b)
 \end{aligned}$$

显然, 振动源的力是通过振动传递路径传播到接受结构的, 在这里也就是通过弹簧和阻尼器传给接受结构. 传递力为

则传递力的幅值为

$$\begin{aligned}
 |F_{T_{pj}}| &= \\
 F_0 & \sqrt{\frac{(k_{pj}^2 + \omega^2 c_{pj}^2)[\omega^2 c_r^2 + (k_r - \omega^2 m_r)^2]}{(\operatorname{Re}\{\det[Z(\omega)]\})^2 + (\operatorname{Im}\{\det[Z(\omega)]\})^2}} \quad (8) \\
 & (j = 1, 2, 3)
 \end{aligned}$$

传递率定义为实际传递力的力幅与激励力幅之比, 即

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{F_{T_{pj}}}{F_0} \right| &= \\
 & \sqrt{\frac{(k_{pj}^2 + \omega^2 c_{pj}^2)[\omega^2 c_r^2 + (k_r - \omega^2 m_r)^2]}{(\operatorname{Re}\{\det[Z(\omega)]\})^2 + (\operatorname{Im}\{\det[Z(\omega)]\})^2}} \quad (9) \\
 & (j = 1, 2, 3).
 \end{aligned}$$

2 路径传递度

考虑路径参数的随机性, 设随机参数向量 $\mathbf{b} = (k_{p1} \ c_{p1} \ k_{p2} \ c_{p2} \ k_{p3} \ c_{p3})^T$ 代表路径的随机性, 因此必然导致随机传递力 $F_{Tp_j} (j=1, 2, 3)$. 由于正态随机变量的线性函数仍然服从正态分布, 因此如果随机参数向量 \mathbf{b} 服从正态分布, 则传递力 $F_{Tp_j} (j=1, 2, 3)$ 通常也服从正态分布.

应用随摄动技术, 把随机参数向量 \mathbf{b} 和传递力 $F_{Tp_j} (j=1, 2, 3)$ 分解为均值与随机扰动两部分, 即

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}^d + \epsilon \mathbf{b}^p \tag{10}$$

$$F_{Tp_j}(\mathbf{b}) = F_{Tp_j}^d(\mathbf{b}) + \epsilon F_{Tp_j}^p(\mathbf{b}) \tag{11}$$

这里 ϵ 为一小参数, 上标为 d 的部分表示随机变量中的确定部分, 上标为 p 的部分表示随机变量中的随机部分, 且具有零均值. 显然这里要求随机部分要比确定部分小得多. 对上面两式取数学期望,

$$\mu_b = E(\mathbf{b}) = E(\mathbf{b}^d) + \epsilon E(\mathbf{b}^p) = \mathbf{b}^d \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \mu_F = E[F_{Tp_j}(\mathbf{b})] &= E[F_{Tp_j}^d(\mathbf{b})] + \\ &\epsilon E[F_{Tp_j}^p(\mathbf{b})] = F_{Tp_j}^d(\mathbf{b}) \end{aligned} \tag{13}$$

同理, 对其取方差, 根据 Kronecker 代数及相应的随机分析理论, 有

$$\sigma_b^2 = \text{Var}(\mathbf{b}) = E\{[\mathbf{b} - E(\mathbf{b})]^{[2]}\} = \epsilon^2 (\mathbf{b}^p)^{[2]} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \sigma_F^2 = \text{Var}[F_{Tp_j}(\mathbf{b})] &= \\ E\{[F_{Tp_j}(\mathbf{b}) - E[F_{Tp_j}(\mathbf{b})]]^{[2]}\} &= \epsilon^2 [F_{Tp_j}^p(\mathbf{b})]^{[2]} \end{aligned} \tag{15}$$

根据向量值和矩阵值函数的 Taylor 展开式, 当随机参数的随机部分比其确定部分小得多时, 可以把 $F_{Tp_j}^p$ 在 $E(F_{Tp_j}) = F_{Tp_j}^d$ 附近展开到一阶为止, 有

$$F_{Tp_j}^p(\mathbf{b}) = \frac{\partial F_{Tp_j}^d(\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}^T} \mathbf{b}^p \tag{16}$$

把其代入(15)式, 有

$$\begin{aligned} \sigma_F^2 = \text{Var}[F_{Tp_j}(\mathbf{b})] &= \epsilon^2 E\left[\left(\frac{\partial F_{Tp_j}^d(\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}^T}\right)^{[2]} (\mathbf{b}^p)^{[2]}\right] = \\ &\left(\frac{\partial F_{Tp_j}^d(\mathbf{b})}{\partial \mathbf{b}^T}\right)^{[2]} \text{Var}(\mathbf{b}) \end{aligned} \tag{17}$$

式中 $E(\mathbf{b})$ 和 $\text{Var}(\mathbf{b})$ 分别代表基本随机变量的均值与方差矩阵, 其中方差矩阵包含所有的方差和协方差. 传递力的灵敏度矩阵 $\partial F_{Tp_j}^d / \partial \mathbf{b}$ 可以表示为

$$\frac{\partial F_{Tp_j}^d}{\partial \mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{Tp_j}^d}{\partial k_{p1}} & \frac{\partial F_{Tp_j}^d}{\partial c_{p1}} & \frac{\partial F_{Tp_j}^d}{\partial k_{p2}} & \frac{\partial F_{Tp_j}^d}{\partial c_{p2}} & \frac{\partial F_{Tp_j}^d}{\partial k_{p3}} & \frac{\partial F_{Tp_j}^d}{\partial c_{p3}} \end{bmatrix} \tag{18}$$

把方程(18)代入方程(17), 就可以得到传递力的方差矩阵. 显然可见, 在求传递力的方差时, 这里只涉及传递力的一阶灵敏度, 这给解决工程实际问题代来了相当的方便; 当然, 如果取高阶矩为一阶以上的精度, 会带来数学上的繁琐.

根据随机变量商数的统计特性, 传递率的均值和方差表示为

$$\mu_r = E[T_r^j] = \frac{E(F_{Tp_j})}{E(F_0)} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} \sigma_r^2 = \text{Var}[T_r^j] &= \frac{[E(F_{Tp_j})]^2}{[E(F_0)]^2} \left\{ \frac{\text{Var}(F_0)}{[E(F_0)]^2} + \right. \\ &\left. \frac{\text{Var}(F_{Tp_j})}{[E(F_{Tp_j})]^2} - 2\rho \frac{\sqrt{\text{Var}(F_0)} \sqrt{\text{Var}(F_{Tp_j})}}{E(F_0)E(F_{Tp_j})} \right\} \end{aligned} \tag{20}$$

式中 ρ 为传递力的力幅与激励力幅的相关系数. 严格地说, 通常两个正态随机变量之商不服从正态分布, 但是如果分母为常数, 则两个正态随机变量之商服从正态分布, 可见这时传递率同样服从正态分布; 另外, 如果分母为随机变量, 在某些情况下, 其商近似于正态分布, 或是稳定的, 这时也可以近似地应用正态分布函数定义传递率.

传递系数定义为

$$\beta = \frac{\mu_r}{\sigma_r} = \frac{E[T_r^j]}{\sqrt{\text{Var}[T_r^j]}} \quad (j = 1, 2, 3) \tag{21}$$

以传递率定义传递度为

$$R_r^j = \Phi\left(\frac{\mu_r}{\sigma_r}\right) = \Phi\left(\frac{E(T_r^j)}{\sqrt{\text{Var}(T_r^j)}}\right) \quad (j = 1, 2, 3) \tag{22}$$

式中 $\Phi(\cdot)$ 为标准正态分布函数. 可见传递度可表述为路径对接受结构振动贡献量的概率, 或称为传递概率.

3 数值算例

某振动传递路径系统的模型如图 1 所示, 振源系统的质量 $m_s = 8 \text{ kg}$, 振源系统的阻尼 $c_s = 0.5 \text{ N} \cdot \text{s/m}$, 振源系统的刚度 $k_s = 100 \text{ N/m}$; 接受系统的质量 $m_r = 10 \text{ kg}$, 接受系统的阻尼 $c_r = 1.0 \text{ N} \cdot \text{s/m}$, 接受系统的刚度 $k_r = 180 \text{ N/m}$; 激励的频率 $\omega = 100 \text{ rad/s}$; 随机路径以随机参数向量 $b_{6 \times 1} = (k_{p1} \ c_{p1} \ k_{p2} \ c_{p2} \ k_{p3} \ c_{p3})^T$ 为代表, 路径的随机阻尼系数和弹性刚度分别服从方差系数为 0.05 的正态分布, 3 个路径的阻尼系数和弹性刚度的均值分别为 $c_{p1} = 0.5 \text{ N} \cdot \text{s/m}$, $c_{p2} = 0.75 \text{ N} \cdot \text{s/m}$, $c_{p3} = 0.25 \text{ N} \cdot \text{s/m}$, $k_{p1} = 450 \text{ N/m}$, $k_{p2} = 225 \text{ N/m}$, $k_{p3} = 300 \text{ N/m}$, 假设激励幅值为确定变量 $F_0 = 100 \text{ N}$. 试确定此振动传递系统的各路径的传递率和传递度.

系统的固有频率和固有振型为

$$\omega_1 = 3.9397 \text{ rad/s}, \quad \{X^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ 0.9752 \end{Bmatrix}$$

$$\omega_2 = 15.3086 \text{ rad/s}, \quad \{X^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} 1.0000 \\ -0.8203 \end{Bmatrix}$$

图 2 表示各路径传递率 $|F_{T_j}/F_0|$ ($j=1, 2, 3$) 关于激励频率 ω 的特性曲线.

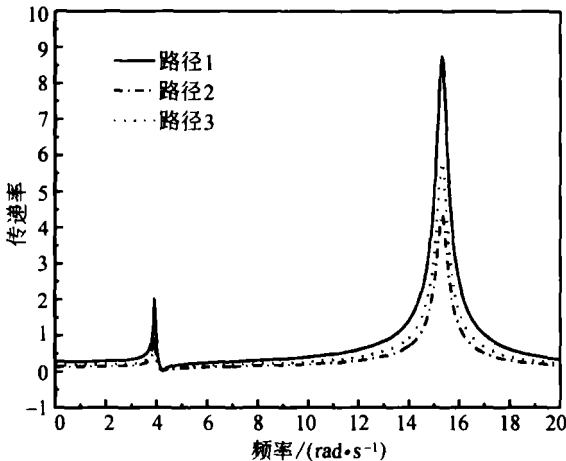


图 2 路径传递率关于激励频率的特性曲线

从 $|F_{T_j}/F_0|$ ($j=1, 2, 3$) 对 ω 的频率响应的曲线图 2 可以看出以下两个问题: (i) 在两个固有频率处 ($\omega = \omega_1$ 或 $\omega = \omega_2$), $|F_{T_j}/F_0|$ ($j=1, 2, 3$) 均很大, 传递率很高; (ii) 路径 1 对接受结构振动的贡献量要大于路径 3, 路径 3 的贡献量要大于路径 2.

图 3 表示各路径传递度 R_j^p ($j=1, 2, 3$) 关于激励频率 ω 的特性曲线.

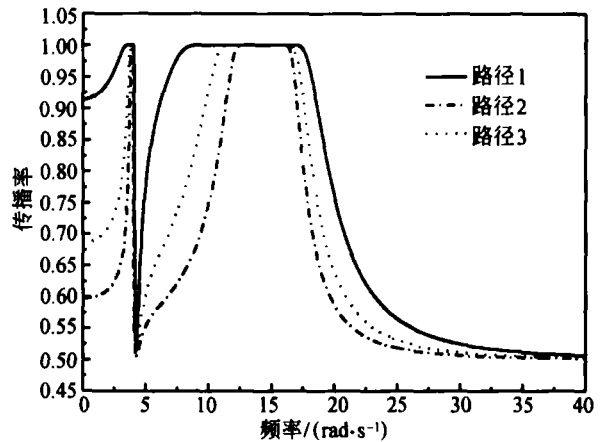


图 3 路径传递度关于激励频率的特性曲线

从传递度 R_j^p ($j=1, 2, 3$) 对 ω 的频率响应的曲线图 3 同样可以得出: (i) 在两个固有频率处 ($\omega = \omega_1$ 或 $\omega = \omega_2$) 及其相应的邻域内, R_j^p ($j=1, 2, 3$) 均为 1.0, 表示传递度最高; 另外, 在有些频段上传递度也很高, 表示在这些频段上路径对接受结构振动的贡献量很大, 这主要决定于传递路径系统的参数特性; (ii) 路径 1 对接受结构振动的贡献量要大于路径 3, 路径 3 的贡献量要大于路径 2.

4 结论

对频域内振动传递路径系统的路径传递概率的度量方法进行有益地探索具有重要的学术理论和实际应用价值. 本文在提出了振动传递路径系统的路径传递度的新概念的同时, 给出了相应的数值方法, 并获得了理想的数值模拟结果, 据此可以为解决振动传递路径系统的路径传递度量问题提供有效方便的新途径. 在确定出各路径对接受结构振动的贡献量以后, 就可以有的放矢地进行有效的振动隔振.

致谢 感谢美国 The Ohio State University 的 R. Singh 教授在作者做访问学者期间提供的振动路径模型(图 1).

参 考 文 献

- 1 Lyon RH, Dejong RG. Theory and Application of Statistical Energy Analysis. Boston: Butterworth Heinemann, 1995
- 2 Wohlever JL, Bernhard RJ. Mechanical energy flow models of rods and beams. Journal of Sound and Vibration, 1992, 153(1): 1—19
- 3 Singh R, Kim S. Examination of multi dimensional vibration isolation measures and their correlation to sound radiation over a broad frequency range. Journal of Sound and Vibration, 2003, 262(3): 419—455
- 4 张义民. 机械振动力学. 长春: 吉林科学技术出版社, 2000
- 5 Zhang YM, Chen SH, Liu QL, et al. Stochastic perturbation finite elements. Computers & Structures, 1996, 59(3): 425—429
- 6 Zhang YM, Wen BC, Chen SH. PFEM formalism in Kronecker notation. Mathematics and Mechanics of Solids, 1996, 1(4): 445—461
- 7 Wen BC, Zhang YM, Liu QL. Response of uncertain nonlinear vibration systems with 2D matrix functions. Int J Nonlinear Dynamics, 1998, 15(2): 179—190

听觉认知研究领域取得最新进展

近日, 中国科学技术大学生命科学学院陈林教授领导的课题组在听觉认知研究领域取得最新进展, 他们通过对母语为汉语的人群如何感知汉语声调的深入研究, 证明了在听觉认知处理的早期阶段决定大脑半球优势的因素是听觉信号的声学特性, 而不是听觉信号的功能. 该研究成果发表在 12 月 19 日出版的国际著名学术期刊《美国科学院院刊》(PNAS)上. 该杂志的审稿人说, 这项工作利用了汉语具有声调的特点, 为解决语言认知处理领域中长期存在的争论做出了贡献. 它填补了关于大脑在早期认知阶段如何处理语言研究中的一个空白, 具有重要的理论意义.

科学界早就知道人类大脑的左半球在处理听觉语言信号时占优势, 而大脑的右半球在处理音乐信号时占优势. 但究竟是什么因素决定了大脑左右两个半球的这种分工却是一个令学术界长期困惑的难题, 并形成了两个完全不同的假说. 功能假说认为决定大脑半球优势的因素是听觉信号所具有的功能, 与信号的声学特性无关. 而声学假说则认为决定大脑半球优势的因素是听觉信号的声学特性, 与信号所具有的功能无关. 两种假说之间的争论相持不下, 并且其中的任何一个假说都不能解释所有的实验数据.

该课题组利用既类似音乐又同时携带语义的汉语声调作为刺激信号来研究大脑的早期听觉认知过程, 巧妙地解决了两种假说之间的争论. 文章指出, 先前报道的相关研究工作未能够通过分阶段观测大脑听觉认知处理过程来研究这个问题, 但实际上声学假说在早期的意识前加工阶段是成立的, 而功能假说则在后期的意识加工阶段是成立的. 文章同时提出了一个两级听觉认知模型, 将声学假说和功能假说统一起来. 根据这个模型, 在意识前阶段右脑依据听觉输入的声学特性成为处理汉语声调的优势半球, 而到了意识阶段左脑依据听觉输入的语义功能成为处理汉语声调的优势半球.

该项研究得到了中国科学院知识创新工程、国家自然科学基金和科技部国家重点基础研究发展计划的资助.

(供稿: 中国科技大学)